1．

解説

[1]

ヒント

$\sqrt{a^2}=a$ にあらず，$\sqrt{a^2}=|a|$

$9a^2-6a+1=\left(\boxed{3}a-\boxed{1}\right)^2$

$$\begin{aligned}\therefore\quad A&=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|\\&=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|\\&=|3a-1|+|a+2|\end{aligned}$$

- $a>\dfrac{1}{3}$ のとき，$A=(3a-1)+(a+2)=\boxed{4}a+\boxed{1}$
- $-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$A=(1-3a)+(a+2)=\boxed{-2}a+\boxed{3}$
- $a<-2$ のとき，$A=(1-3a)+(-a-2)=-4a-1$

$A=2a+13$ について考察する．

$a>\dfrac{1}{3}$ のとき，$4a+1=2a+13$ より，$a=6$ これは適する．

$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$-2a+3=2a+13$ より，$a=-\dfrac{5}{2}$ これは適さない．

$a<-2$ のとき，$-4a-1=2a+13$ より，$a=-\dfrac{7}{3}$ これは適する．

よって，$a=\boxed{6},\boxed{\dfrac{-7}{3}}$

[2]

(1)

条件$\overline{p}$ は，「m，またはn の少なくとも一方が偶数である」である．

よって，m が奇数ならばn は偶数（⓪）である．また，m が偶数ならばn は偶数でも奇数でもよい（②）．

(2)

q が成立するならば，m，n はともに奇数でなければならない．よって，p とq は同値．よって，p はq であるための必要十分条件である（⓪）．

r が成立するとき，p，q はともに奇数か，または，ともに偶数である．よって「p ならばr」は真であるが，「r ならばp」は偽．よって，p はr であるための十分条件であるが．必要条件ではない（②）．

$\overline{p}$ は(1)で述べた通りになるので，$\overline{p}$ はr であるための必要条件でも十分条件でもない（③）．

[3]

(1)

$$y=x^2+(2a-b)x+a^2+1$$
$$=\left(x+\frac{2a-b}{2}\right)^2-\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2+a^2+1$$
$$=\left\{x-\left(\frac{b}{2}-a\right)\right\}^2-\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)+a^2+1$$
$$=\left\{z-\left(\frac{b}{2}-a\right)\right\}^2-\frac{b^2}{4}+ab+1$$

頂点は，$\left(\dfrac{b}{\boxed{2}}-a,\ -\dfrac{b^2}{\boxed{4}}+ab+\boxed{1}\right)$

(2)

グラフが$(-1,6)$を通るとき，

$$6=1-(2a-b)+a^2+1$$

よって，

$$b=-a^2+2a+4$$
$$=-(a-1)^2+5$$

bのとり得る値の最大値は$\boxed{5}$であり，そのときのaの値は$\boxed{1}$である.

$y=x^2$の頂点は$(0,0)$．$b=5$，$a=1$のとき，グラフGの頂点は$\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$.

従って，Gは$y=x^2$をx軸方向に$\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$，$y$軸方向に$\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{4}}$だけ平行移動

したものである.

２.

解説

[1]

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3^2+2^2-4^2}{2\times3\times2}=\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{4}}<0$であるから，$\angle\mathrm{BAC}$は②鈍角である.

$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}$.

$\angle$BACが鈍角なので，線分ACの垂直二等分線は辺ABのA側の延長上で直線ABと

交わる．線分ACの中点をMとすると，$\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AD}}=\cos\angle\mathrm{CAD}=-\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$．

$\mathrm{AM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=1$ だから，$\mathrm{AD}=\boxed{4}$．$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

だから$\triangle\mathrm{DBC}=\dfrac{(3+4)}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{\boxed{7}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}$．

〔2〕

(1)

2013年の箱ひげの特徴は開花日の最小値が7か年で最も小さい（早い）72日ごろ，同最大値が7か年で最も大きい（遅い）136日ごろ．また中央値が80日ごろであるから，これに当てはまるヒストグラムは $\boxed{③}$ である．

2017年の箱ひげの特徴は開花日の最小値が80日，最大値が122日．また，中央値の値92日と90日～95日に四分位範囲があることから，ヒストグラムは $\boxed{④}$．

(2)

モンシロチョウの四分位範囲は103－83＝20ぐらいだから，④は誤り．
また，切片±15日から外れている点がいくつかあるので初見日の差が15日以下ということはないから⑦は誤り．

(3)

Xの偏差の平均値は，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}=\overline{x}-\frac{n\overline{x}}{n}=\boxed{0(⓪)}$$

XからX'への変換は正規化に相当するので，X'の平均値は $\boxed{0(⓪)}$，標準偏差は $\boxed{1(①)}$．

また，正規化に伴う散布図の変化は，相似変換（厳密に言うと，縦横のスケールは異なる場合がある）なので，図4に相当する図5は同様の散らばり具合にならなければならない，この時点で①と③は却下．また，正規分布の±1の範囲には概ね全体の67％程度のデータが集まる．一方箱ひげでは第一四分位から第三四分位までに全体の半数が集まる．これらのことを考慮に入れると，当然正規化後の標準偏差1よりはみ出るデータも存在する．よって，⓪は却下で図5の正解は $\boxed{②}$．

３．

解説

(1)

1回目に赤い袋が選ばれ，赤球が取り出される確率は，$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$．

また，1回目に白い袋が選ばれ，赤球が取り出される確率は$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$．

(2)

(1)より2回目に赤い袋が選ばれる確率は$\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{11}{18}$であり，白い袋が選ばれるのはこの余事象だから$1-\dfrac{11}{18}=\dfrac{\boxed{7}}{\boxed{18}}$．

(3)

1回目で白球を取り出す確率をpとするとき，2回目で白球が取り出される確率は

$p\times\dfrac{1}{2}+(1-p)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}p+\dfrac{1}{3}$．$p=\dfrac{7}{18}$だから，2回目で白球が取り出される

確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{7}{18}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7+36}{108}=\dfrac{\boxed{43}}{\boxed{108}}$．

3回目で白球が取り出される確率は，$\dfrac{43}{108}\times\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{43}{108}\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\boxed{259}}{\boxed{648}}$．

(4)

2回目で白球を取り出す確率は，$\dfrac{43}{108}$．2回目で白球を取り出しなおかつそれが白い袋である確率は$\dfrac{7}{18}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{36}$．よってこの条件付き確率は$\dfrac{7}{36}\div\dfrac{43}{108}=\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{43}}$．

3回目で白球を取り出す確率取り出す確率は$\dfrac{259}{648}$．取り出す球が赤→赤→白となるのは，

$\dfrac{11}{18}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{22}{162}$．よってこの条件付き確率は$\dfrac{22}{162}\div\dfrac{259}{648}=\dfrac{\boxed{88}}{\boxed{259}}$．

４．

(解説)

(1)

ユークリッドの互除法を用いる．

$49=23\times 2+3$

$23=3\times 7+2$

$3=2\times 1+1$

これを逆にたどって，

$3-(23-3\times 7)\times 1=1$

$3\times 8-23\times 1=1$

$(49-23\times 2)\times 8-23\times 1=1$

$49\times 8-23\times 17=1$

よって，$49x-23y=1$ の一般解はkを整数として，

$x=\boxed{23}k+8$，$y=\boxed{49}k+17$

これらを満たす自然数でxが最小値のものは，$x=\boxed{8}$，$y=\boxed{17}$．

(2)

(1)より，$A=49x, B=23y$ とするとその差が± 1（すなわち，絶対値1）となるのは，$x=23k\pm 8$，$y=49k\pm 17$ (複号同順)．ここで，差が± 1であることを考慮して複号を用いた．自然数でAが最小となるのは，

$(A, B)=\left(49\times \boxed{8}, 23\times \boxed{17}\right)$

また，差が± 2（絶対値2）となるのは，$x=23k\pm 16, y=49k\pm 34$（複号同順）．
よって，自然数でAが最小となるのは，

$(A, B)=\left(49\times \boxed{7}, 23\times \boxed{15}\right)$

である．

(3)

ユークリッドの互除法を用いる．

$(a+1)-a=1$より，aと$a+1$は互いに素．すなわち，最大公約数は1.
また，$(a+2)-(a+1)=1$だから，これらの最大公約数も1.

$(a+2)-a=2$ だから，aが2で割り切れるならば(すなわちaが偶数)，最大公約数は$\boxed{2}$，aが奇数ならば，最大公約数は1.

隣接する3つの自然数$a, a+1, a+2$には，偶数が少なくとも1つ（1つまたは2つ），3の倍数は必ず1つ含まれていて，なおかつ2，3は互いに素だから，隣接3自然数の積は必ず$2\times 3=6$ の倍数になる．ところが$a=1$とすると，$1\times 2\times 3=6$ なので，たかだか6でしか割り切れない．よって，$m=\boxed{6}$．

(4)

6762を素因数分解すると$2\times\boxed{3}\times 7^{\boxed{2}}\times\boxed{23}$ (なるほどそういう流れか!).

. $b, b+1, b+2$ は隣接するので6の倍数である，よって，どれかが$7^2=49$ ，どれかが23の倍数でなければならない．冒頭の理由により，3つの自然数は最大公約数がたかだか2なので，49の倍数または23の倍数となるのは，各々，$b, b+1, b+2$ のうちの1つである(ただし，同時に49×23の倍数であることもある)．さて，(2)を考慮すると，隣接2数がこの条件を満たす最小の自然数は，$49\times 8=392, 23\times 17=391$ ．この場合$b=390$ とすればよい．また$b, b+2$ がこの条件を満たすのは，$b=49\times 7=343, b+2=23\times 15=345$ である．よって，b の最小値は$b=343$ ．