１．

解説

〔1〕

$$f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$$

(1)

$$f(0)=3\times0^2+4\times0\times1-1^2=\boxed{-1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{4}=\boxed{2}+\sqrt{\boxed{3}}$$

(2)

$$\cos^2\theta=\frac{\cos2\theta+\boxed{1}}{\boxed{2}}\ ,\ \sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}\ ,\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$$ より，

$$\begin{aligned}f(\theta)&=3\times\frac{1-\cos\theta}{2}+4\times\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1+\cos\theta}{2}\\&=\boxed{2}\sin2\theta-\boxed{2}\cos2\theta+\boxed{1}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2\sin2\theta-2\cos2\theta+1\\&=2\times\sqrt{1^2+1^2}\times\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1\\&=\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{\boxed{4}}\right)+1\end{aligned}$$

2倍角になっているので，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，正弦はすべての値をとり得るから，

$$-2\sqrt{2}+1\leqq f(\theta)\leqq2\sqrt{2}+1$$

$2\sqrt{2}+1=3.828\cdots$ だから，整数値の最大値は$m=\boxed{3}$．

$f(\theta)=3$ のとき，$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるから，θの範囲を考慮して，

$$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore\quad\theta=\frac{\pi}{\boxed{4}},\frac{\pi}{\boxed{2}}$$

〔2〕

$$\begin{cases}\log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1\\ \left(\frac{1}{3}\right)^y-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0\end{cases}$$

真数条件より，$x+2>0, y+3>0$ （$\boxed{⓪}$）．

$$\therefore x>-2, y>-3\ (⓪)$$

底の変換を用いて，

$$\log_4(y+3)=\frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\frac{\log_2(y+3)}{\boxed{2}}$$

これより，上式は，

$$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1$$

$$\log_2\left(\frac{x+2}{y+3}\right)=\log_2 2^{-1}$$

$$\frac{x+2}{y+3}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore y=\boxed{2}x+\boxed{1}$$

したがって，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$$

$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおくと，

$$\left(\frac{1}{3}\right)t^2-\frac{11}{3}t+6=0$$

$$t^2-\boxed{11}t+\boxed{18}=0\cdots⑤$$

$x>-2$ のとき

$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ をxの関数とみなすと，xに関して減少関数だから，$x>-2$ のとき，

$$\boxed{0}<t<\boxed{9}$$

⑤の2次方程式の解は$t=2, 9$ だから，条件を満たすのは，$t=\boxed{2}$．

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=2$ より，$3^x=\frac{1}{2}$ だから，$x=\log_3\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$．

また．$y=2x+1=2\log_3\frac{1}{2}+1=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\log_3 3=\log_3\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$．

２．

解説

C: $y=f(x)=x^3+px^2+qx$，D: $y=-kx^2$

(1)

$f'(x)=3x^2+2px+q$ で$x=-1$ で極値$f(-1)=2$ だから，

$f'(-1)=3-2p+q=\boxed{0}$, $f(-1)=-1+p-q=2$

これらの連立方程式を解いて，$p=\boxed{0}$, $q=\boxed{-3}$．したがって，$f(x)=x^3-3x$．

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ より，$f(x)$ は$x=\boxed{1}$ のとき，極小値$\boxed{-2}$.

(2)

放物線D の$x=a$ における接線は，

$$y=\boxed{-2}kax+ka^2$$

x 軸との交点のx 座標は，$x=\dfrac{\boxed{a}}{\boxed{2}}$.

D とx 軸および$x=a$ で囲まれた図形の面積をT とすると，

$$T=\int_0^a\{0-(-kx^2)\}dx=\left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a=\frac{k}{\boxed{3}}a^{\boxed{3}}$$

接線ℓとx 軸および$x=a$ によって作られる三角形の面積をU とすると，

$$U=\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{a}{2}\right)\times ka^2=\frac{k}{4}a^3$$

よって，

$$S=T-U=\frac{k}{3}a^3-\frac{k}{4}a^3=\frac{k}{\boxed{12}}a^3,$$

(3)

点$A\,(a,\,-ka^2)$ がC 上にあるとすると

$$-ka^2=a^3-3a$$

が成り立つ．$a>0$ だから，両辺を$-a^2$ で割って，

$$k=\frac{\boxed{3}}{\boxed{a}}-\boxed{a}$$

ℓとC の接点のx 座標をb とすると，$(b,\,b^3-3b)$ における接線の方程式より，

$$\ell:\ y=\boxed{3}\left(b^2-\boxed{1}\right)x-\boxed{2}b^3$$

よって，

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=x^3-3x-3(b^2-1)x+2b^3\\&=x^3-3b^2x+2b^3\\&=(x-b)(x^2+bx-2b^2)\\&=\left(x-\boxed{b}\right)^2\left(x+\boxed{2}b\right)\end{aligned}$$

注意

ℓは$x=b$ におけるC の接線なので，$(x-b)^2$ で割り切れる．

したがって，C とℓのもう一つの共有点は点A だから，$a=-2b$．これより，

$$3(b^2-1)=3\left\{\left(\frac{-a}{2}\right)^2-1\right\}=\frac{3}{4}a^2-3$$

これは傾き$-2ka=-2\left(\frac{3}{a}-a\right)a=2a^2-6$ に等しいので，

$$2a^2-6=\frac{3}{4}a^2-3$$

a^2 について解くと，

$$a^2=\frac{\boxed{12}}{\boxed{5}}$$

このとき，

$$S=\frac{k}{12}a^3=\frac{1}{12}\left(\frac{3}{a}-a\right)a^3=\frac{1}{12}(3a^2-a^4)=\frac{1}{12}\left(\frac{3\times 12}{5}-\frac{12^2}{25}\right)$$

$$=\frac{3}{5}-\frac{12}{25}=\frac{15-12}{25}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{25}}$$

３．

(解説)

(1)

$$S_2=3+3\times 4=\boxed{15}\ ,\ T_2=-1+S_1=-1+3=\boxed{2}$$

(2)

$$S_n=3\times\frac{4^n-1}{4-1}=\boxed{4}^{\boxed{n(⓪)}}-\boxed{1}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

また，$T_1=-1$ で，$n\geqq 2$ のとき，

$$T_n=-1+\sum_{k=1}^{n-1}S_k=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(4^k-1)=-1+4\times\frac{4^{n-1}-1}{4-1}-(n-1)$$

$$=\frac{\boxed{4}^{\boxed{n(⓪)}}}{\boxed{3}}-n-\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}\ (n=2,3,4,\cdots)\cdots ①$$

ところが，この式は$n=1$のときも成り立つから，式①はすべての自然数で成り立つ．

(3)

$$na_{n+1}=4(n+1)a_n+8T_n$$

両辺を$n(n+1)$ で割って，

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}$$

$b_n=\dfrac{a_n+2T_n}{n}$ とすると，$T_1=\dfrac{a_1+2T_1}{1}=-3+2\times(-1)=\boxed{-5}$

$\{T_n\}$ の漸化式を求める．

$T_{n+1}=\dfrac{4^{n+1}}{3}-(n+1)-\dfrac{4}{3}$ である．ここで，$\dfrac{4^n}{3}=T_n+n+\dfrac{4}{3}$ であることを用いると，

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=4\left(T_n+n+\frac{4}{3}\right)-n-\frac{7}{3}\\&=\boxed{4}T_n+\boxed{3}n+\boxed{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}}{n+1}+\frac{2T_{n+1}}{n+1}\\&=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}+\frac{2\times(4T_n+3n+3)}{n+1}\\&=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}+\frac{8nT_n}{n(n+1)}+6\\&=\frac{4a_n}{n}+\frac{8(n+1)T_n}{n(n+1)}+6\\&=4\left(\frac{a_n+2T_n}{n}\right)+6\\&=\boxed{4}b_n+\boxed{6}\end{aligned}$$

これは，特製方程式を用いて，

$$b_{n+1}+2=4(b_n+2)$$

と変形できるから，

$$b_n+2=4^{n-1}(b_1+2)=-3\cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore\quad b_n=\boxed{-3}\cdot 4^{\boxed{n-1(⓪)}}-\boxed{2}$$

よって，

$$\begin{aligned}a_n&=nb_n-2T_n\\&=-3n4^{n-1}-2n-2\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)\\&=-\left(3n+\frac{8}{3}\right)4^{n-1}+\frac{8}{3}\\&=\frac{\boxed{-}\left(\boxed{9}n+\boxed{8}\right)4^{n-1}+\boxed{8}}{\boxed{3}}\end{aligned}$$

４．

(解説)

四角形ABCDにおいて，AB＝CDであり，∠ABC＝∠BCDだから，これはAD∥BCとなる等脚台形である．

$$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=\sqrt{3},\ |\vec{c}|=\sqrt{5}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=3,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ から，$\angle\mathrm{AOC}=\boxed{90}^\circ$．

よって，$\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OC}=\dfrac{\boxed{\sqrt{5}}}{\boxed{2}}$

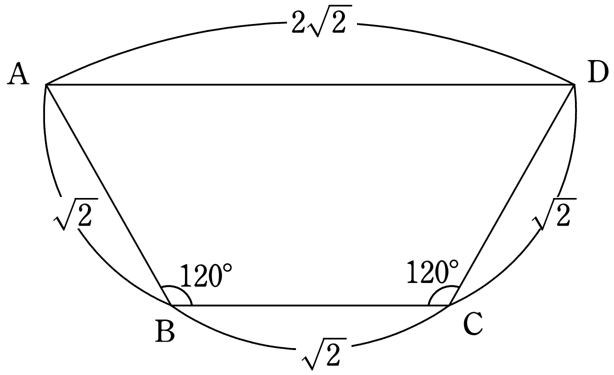
(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=-1-3+3=\boxed{-1}.$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1-2+3=2$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{\boxed{2}}$．また，

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=5-6+3=2$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{2}$．

$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\dfrac{-1}{2}$ だから，$\angle\mathrm{ABC}=\boxed{120}^\circ$．これを図示すると，



上図のようになる．

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ADC}=\boxed{60}^\circ$．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\vec{a}-\boxed{2}\vec{b}+\boxed{2}\vec{c}$$

上図を用いて四角形ABCDの面積をSとすると，

$$S=(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\sqrt{2}\sin60^\circ\times\frac{1}{2}=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$$

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ はベクトル$\vec{a},\vec{c}$ を含む平面に垂直だから，

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=\boxed{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{c}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=(s\vec{a}+t\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{a}=s|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}=s-1=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}c=(s\vec{a}+t\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{c}=s\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2=-3+5t=0$$

よって，$s=\boxed{1}$, $t=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2&=\left|\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{c}-\vec{b}\right|^2\\&=|\vec{a}|^2+\frac{9}{25}|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{6}{5}\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=1+\frac{9}{5}+3-2-\frac{18}{5}\\&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}}$．

したがって，

$$V=\triangle\mathrm{OAC}\times|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}.$$

三角形ABCの面積と三角形ADCの面積比は1:2なので，四角錐OABCDの体積は三角錐BOACの3倍，よって体積は$\boxed{3}V$．四角形ABCDを底面としたときの高さをhとすると，(四角形ABCDの面積)$\times h\times\dfrac{1}{3}=3V$．よって，

$$h=9\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}.$$